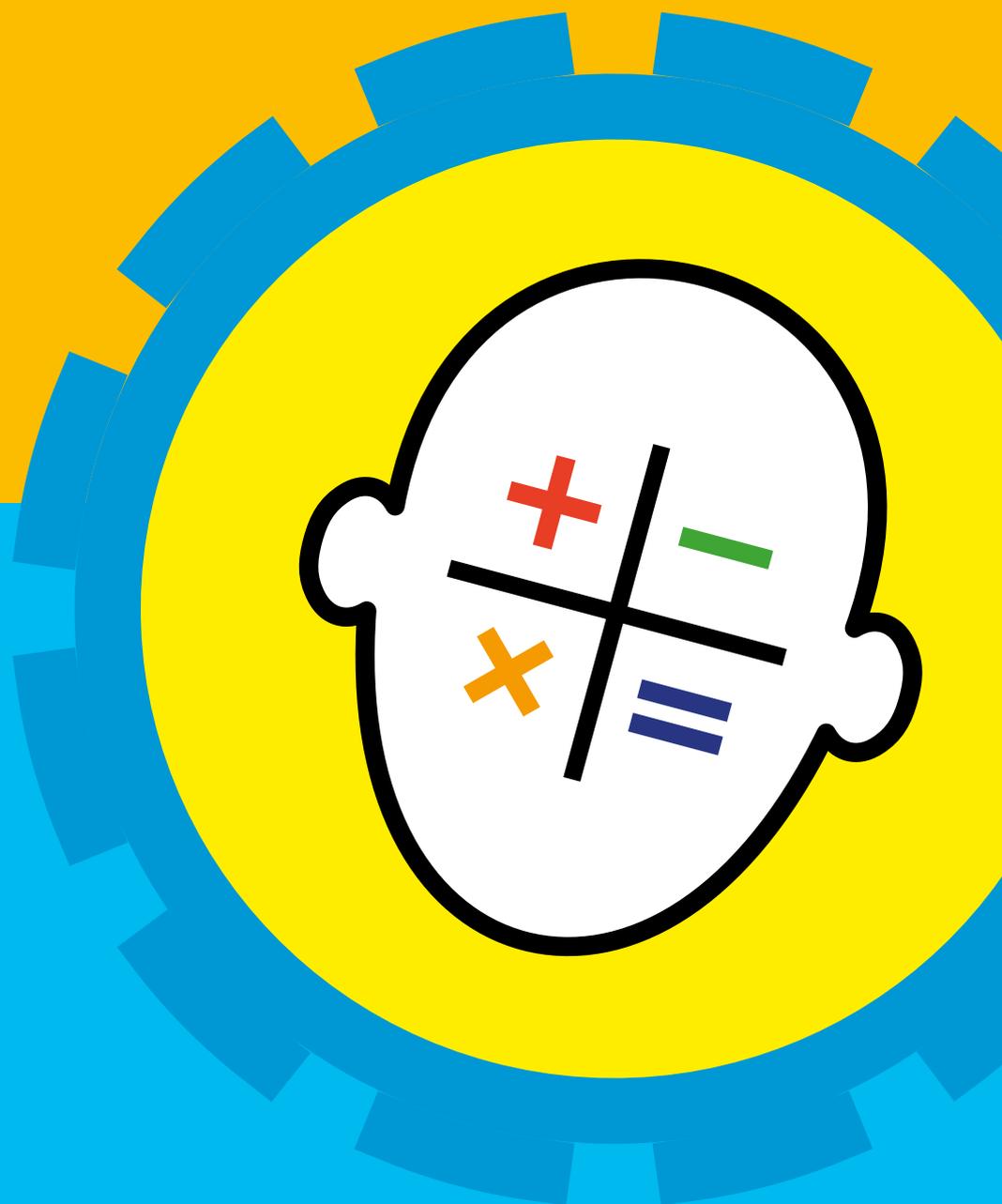


Appropriation de l'abaque dans son côté décimal



à partir d'une démarche proposée par

Yolande Thomé, Lire et Ecrire Brabant wallon
Et mise en page par Delphine Versweyveld, Lire et Ecrire Namur

préambule

Cette séquence a été écrite dans le cadre d'une formation en didactique des mathématiques animée par Anne Chevalier. Le déroulé qui suit doit être adapté aux groupes que vous animez, à leurs projets, à leurs compétences en mathématiques, à l'oral et à l'écrit. Certains d'entre vous travailleront uniquement la première étape de la démarche et ceci en plusieurs séances, d'autres travailleront directement à la deuxième. A vous également d'organiser le temps, toujours, en fonction des savoirs des participants, de leur rythme d'apprentissage, des questions qui apparaissent... Cette démarche est une piste de travail et non pas un mode d'emploi.

contexte

Il s'agit d'un groupe « d'alpha écrit » dont le projet est :

- d'apprendre à lire des plans (métiers de la construction) ;
- d'entrer en formation qualifiante (auxiliaire de l'enfance, technicienne de surface, maçon...).

Le niveau écrit correspond aux niveaux 2-3 du *Test de Positionnement en français pour l'accueil et l'orientation des publics en alphabétisation (édition 2015)*.

Le niveau à l'oral est aisé pour la plupart des participants.

émergence de la question mathématique

En situation professionnelle, les gens ont besoin de mesurer des quantités qui ne tombent pas juste ⇒ comment faire ?

Suite à la construction de l'abaque des entiers (dont la construction a été réalisée en amont), il apparaît que des erreurs subsistent.

- Les erreurs mathématiques types des apprenants sont les suivantes :

$$10.2 < 10.199$$

10 cm 5. Mais 5 quoi?

Pour mesurer, faut-il partir du bord de l'outil ou du zéro ?

- De l'interrogation face à une mesure : quel reste et comment mesurer de manière précise celui-ci ?
- Du besoin d'un système de mesure commun

Ces erreurs mathématiques ont permis aux questions suivantes d'émerger :

- Comment faire pour mesurer des quantités qui ne tombent « pas justes » ? Comment faire pour les partager en parts égales ?
- Comment écrire cette mesure dans le système de mesure en vigueur ?
- Comment lire et écrire un nombre « à virgule » ? Que veut dire cette virgule ?
- Comment lire et écrire des mesures de longueur, de masse, de capacité ?

De cet ensemble de questions, le formateur a choisi de commencer par l'extension de l'abaque dans son côté décimal (les grandeurs non entières) et appropriation de l'abaque des mesures de longueur.

objectifs

- Comprendre le développement symétrique de la partie décimale de l'abaque, en lien avec la partie entière
- S'approprier le vocabulaire propre à chaque rang
- Construire l'abaque des nombres
- Construire l'abaque des mesures

contenus mathématiques

Le système de numération décimale de position et le mètre et ses sous-unités

matériel

- Pailles, pics à brochette, petites boîtes (style triangles de fromage), ciseaux
- Mètres en papier (style magasin de meuble suédois)
- Tableau blanc aimanté, aimants, papier collant, marqueurs
- Dispositif pédagogique : les tables sont positionnées en U devant le tableau blanc aimanté.

déroulement

étape 1 : Couper les pailles en 10, 100,... nommer ces parts et les situer dans l'abaque

objectifs de l'étape 1

- Considérer la paille comme l'unité et la placer comme tel dans l'abaque
- 10 morceaux égaux de l'unité = l'unité
- A l'aide de dixièmes de paille, construire la colonne dixième de l'abaque

matériel devant chaque apprenant

→ 2 paille, 1 pic à brochette, 2 petites boîtes, ciseaux.

matériel en commun

→ Sachets vides ayant représentés, lors de la construction de l'abaque dans sa partie entière, les différents rangs. 1 pois chiche. Aimants. Marqueurs pour tableau blanc. Paille, bouts de paille et papier collant.

- Situer un pois chiche et les différents sachets dans l'abaque

Le formateur met à disposition un pois chiche ainsi que les sachets transparents de tailles différentes (sachet de 10, de 100, de 1000, de 10 000, de 100 000, de 1 000 000). L'abaque des entiers a été travaillé lors d'une séquence pédagogique précédente, voir photo ci-dessous.

Représentation de l'abaque des entiers jusqu'au millier.



Il demande aux apprenants de venir aimanter/coller ces différents sachets et le pois-chiche et de retracer ainsi l'abaque des entiers.

« Replacez ce pois-chiche et ces sachets en colonnes. Quel est le nom de chaque colonne ? Par quelle lettre la représente-t-on ? »

- Situer une paille et les dixièmes de paille dans l'abaque

Il s'agit à présent de positionner les dixièmes de paille dans l'abaque et pour cela d'agrandir celui-ci vers la droite, d'ajouter une nouvelle colonne pour répondre à nos besoins et de la nommer.

Le formateur montre maintenant une paille entière.

« Où placer cette paille dans cet abaque ? Collez-la dans l'abaque avec du papier collant. »

Le formateur distribue ensuite à chacun 2 pailles, 1 pic à brochette, 2 petites boîtes et une paire de ciseaux. Chaque apprenant coupe 1 paille en 10 parts égales et ensuite reconstitue l'unité sur son pic à brochettes.

« Coupez une paille en 10 bouts de même longueur. »

« Avec les 10 bouts obtenus, enfiler-les sur le pic à brochette. »

« Qu'observez-vous ? »

La consigne **qu'observez-vous ?** a pour objectif d'arriver à la réponse « On refait le tout », « On refait le 1 » ou d'autres similaires.

« Dans l'abaque, où placer ce bout de paille-ci, quand nous avons coupé la paille en 10 parts égales ? Pourquoi là ? »

« Quel nom donner à ce rang ? Comment dire '10 fois plus petit que' ? »

« Comment écrire le nom de cette colonne ? »

● Pour sortir un nombre décimal de l'abaque, la virgule

Pour introduire l'usage de la virgule et son rôle de frontière entre la partie entière et la partie non entière d'un nombre, il sera proposé, à chaque fois qu'un nouveau rang est introduit, de présenter une quantité de pailles et morceaux de paille correspondant au rang travaillé, de recenser chacune de ces parties dans l'abaque, puis d'en sortir ce nombre complet en utilisant la virgule pour bien signifier où se trouve l'unité et où commence le recensement des morceaux d'unité.

Le formateur propose une quantité de pailles entières et de dixièmes, par exemple 1 entière et 3 dixièmes.

« Comment écrire dans l'abaque cette quantité de pailles et dixièmes de paille ? »

« A présent, comment sortir de l'abaque ce nombre écrit ici ? Comment l'écrire pour faire comprendre que ce sont 3 morceaux et non pas 3 pailles entières ? Quel symbole utilise-t-on ? »

Ensuite, le formateur demande que ce soit des apprenants qui proposent des quantité de pailles et morceaux de pailles pour continuer la démarche.

« Qui vient choisir une quantité de pailles et de dixièmes de paille ?
Quelqu'un d'autre veut bien venir l'écrire dans l'abaque ? Maintenant que tu as écrit le nombre de chaque partie, écris-le à côté, en dehors de l'abaque, en utilisant la virgule. »

● Les centièmes

Il s'agit maintenant d'introduire les centièmes. Nous allons proposer à chacun de couper un dixième de paille en 10 parts égales, d'observer que ce dixième peut être reconstitué sur le pic à brochette ou l'épingle à sûreté et ensuite de nommer et situer ces nouveaux morceaux.

« Prenez un dixième de paille et coupez-le en 10 parts égales. »

« Si on fait la même chose pour chaque dixième, combien aura-t-on de morceaux en tout, au total ? »

Ici également, le but est de faire prendre conscience du retour au 1 entier, mais également d'aborder le fait que 10 fois le 10 donne 100.

La paille entière, les dixièmes de paille et les centièmes de paille placés sur des pics à brochette.



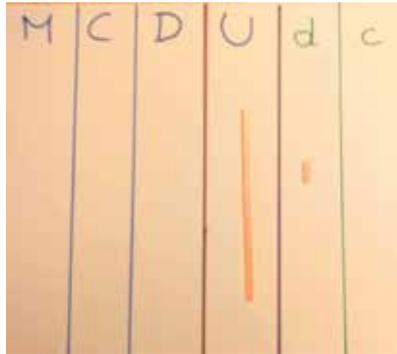
Le groupe positionne les centièmes de paille dans l'abaque et pour cela agrandit celui-ci vers la droite en ajoutant une nouvelle colonne pour répondre aux besoins et en la nommant.

« Où placer un de ces petits bouts de paille dans l'abaque (l'y coller) ? Pourquoi ? »

« Quel nom donner à ce rang ? Comment dire '100 fois plus petit que' ? »

« Comment écrire le nom de cette colonne ? »

Représentation de l'abaque de la partie non entière, jusqu'au centième, avec des morceaux de paille.



Remarque concernant la photo ci-dessus : la partie entière de l'abaque a été tracée en bleu, le rang des unités est délimité de part et d'autre en rouge et la partie décimale est tracée en vert. Le rang des unités, mis en évidence de cette façon, permet d'observer le développement symétrique de l'abaque. Le formateur y fera référence. La différence de couleur entre la partie entière et la partie non entière permet également de mettre en évidence la différence de registre.

Tout comme avec les dixièmes, la démarche d'écriture dans l'abaque et en dehors de celui-ci est proposée.

Le formateur propose une quantité de pailles entières, de dixième(s) et de centième(s), par exemple 1 entière, 4 dixièmes et 7 centièmes.

« Comment écrire dans l'abaque cette quantité de pailles, de dixièmes et de centièmes de paille ? »

« A présent, comment sortir de l'abaque ce nombre écrit ici ? Quel symbole utilise-t-on et où faut-il le placer ? »

Ensuite, le formateur demande que ce soit des apprenants qui proposent des quantités des pailles et morceaux de paille pour continuer la démarche. Chaque apprenant aura l'occasion tant de proposer des quantités que de les écrire.

« Qui vient choisir une quantité de pailles, de dixième et de centième de paille ? »

« Quelqu'un d'autre veut bien venir l'écrire dans l'abaque ? »

« Maintenant que tu as écrit la quantité de chaque partie, écris le nombre à côté, en dehors de l'abaque, en utilisant la virgule. »

Dans un premier temps, le nombre proposé doit être « plein » dans chaque rang, c'est-à-dire sans absence de rang dans l'abaque et donc sans le besoin du zéro pour l'écriture décimale. Quand les apprenants n'hésiteront plus, alors des nombres avec absence de rang seront proposés, comme par exemple 1,05.

Etant donné qu'il est impossible de couper une paille en 1000 parts égales, nous devons changer de support dans le but de parvenir aux millièmes, de prendre en compte une classe entière. Nous choisissons le mètre.

étape 2 : Couper le mètre en 10, 100 et 1000 parts égales, nommer ces parts et les placer dans l'abaque

objectifs

- Systématiser l'approche
- Aller au millième

matériel

→ un mètre ruban en papier par personne de 100 cm exactement. Couper ou plier les bords si ceux-ci ne coïncident pas avec le 0 et le 100, dans le but de pouvoir le plier et que les segments soient tous de la même longueur.

Cet ajustement au 0 et 100 permet d'aborder également le sens du zéro comme point de départ de la mesure (et non pas forcément le bord de l'outil).

Remarque générale pour cette étape 2 : le formateur a 4 mètres :

- l'un pour réaliser les consignes comme les apprenants, en miroir, en le gardant donc intègre
- l'autre pour le couper en décimètres (petite boîte)
- le troisième pour le couper en centimètres (petite boîte)
- le quatrième pour prélever au moins un millimètre

Les parties serviront tant pour en aimer une au tableau, dans le rang correspondant dans l'abaque représenté, que pour réaliser l'exercice de placer une mesure décimale dans l'abaque et d'écrire ce nombre en dehors de celui-ci.

- **Situer le mètre entier dans l'abaque des mesures de longueurs**

Comme lors du travail réalisé avec la paille, il est demandé au groupe de placer le mètre entier dans l'abaque constitué au préalable au tableau. Pour rappel, les colonnes y sont déjà représentées jusqu'au centième.

L'objectif d'une répétition des mêmes opérations sur du matériel différent permet de systématiser l'approche, d'accéder à la régularité et ainsi à l'abstraction.

« Où pouvons-nous placer ce mètre tel quel dans l'abaque ? Nous allons l'y aimer. »

Il vaut mieux effacer l'abaque des nombres pour constituer l'abaque des mesures. En effet, lors des conversions de mesure où l'on choisit l'unité de mesure (par exemple : $1,67\text{m} = 167\text{cm}$), il y a glissement de l'abaque des nombres sur l'abaque des mesures. Il est donc intéressant qu'ils ne soient pas figés, fixés l'un sur l'autre, même si nous comptons sur le parallèle pour le développer.

● Situer les dixièmes de mètre dans l'abaque des longueurs

Il s'agit à présent de plier le mètre en 10 parts égales et de former/observer ainsi le dixième de mètre. L'observation portera également sur le fait que chaque pli coïncide avec les changements de dizaines, en réalisant des sauts de 10 en 10. Le formateur coupe le mètre qui est à sa disposition.

Il est demandé de plier et non de couper ce mètre car il pourra servir lors d'autres séquences pédagogiques en lien avec le mesurage. Si néanmoins cela semble plus porteur pour le formateur, le choix de couper peut être pris.

« Pliez chacun le mètre en 10 bouts de même longueur. »

« Qu'observez-vous ? Si vous le dépliez à présent, que se passe-t-il ? »

Il est attendu que les apprenants, tout comme avec le pic à brochette pour les pailles, expriment à nouveau le fait de refaire le un, dans ce cas-ci, de refaire le mètre. Qu'il faut les 10 parties du mètre pour le refaire en entier, que les 10 parties de 10 refont l'unité de mesure. Et que chaque partie, morceau de mètre, est 10 fois plus petite que le mètre.

Le groupe va positionner à l'aide d'un aimant le dixième de mètre coupé par le formateur dans l'abaque, compléter ainsi par un autre exemple la première colonne à droite de l'unité. L'objectif est également de trouver le nom exact de cette colonne, le **décimètre**.

Les apprenants sont également systématiquement invités à argumenter leurs réponses/propositions en laissant les autres exprimer et justifier leur accord ou désaccord.

« Dans l'abaque, où placer ce bout de mètre-ci ? Pourquoi là ? »

« Quel nom donner à ce rang ? Comment dire '10 fois plus petit que le mètre' ? »

« Comment l'écrire ? Quelle abréviation est utilisée ? »

● Pour sortir une longueur décimale de l'abaque, la virgule

Comme lors du travail avec les pailles, chaque fois qu'un nouveau rang de l'abaque des mesures est introduit, le lien avec l'écriture décimale (et donc l'usage de la virgule) sera explicité.

Seulement quand il n'y aura plus de confusion avec des exercices où chaque rang est occupé, des exercices avec des rangs vides seront proposés.

Le formateur propose une quantité de mètres et de décimètres, par exemple 1 mètre et 2 décimètres.

« Comment écrire dans l'abaque cette quantité de mètres et de dixièmes de mètre ? »

« A présent, comment sortir de l'abaque des mesures ce nombre écrit ici ? Comment l'écrire pour faire comprendre que ce sont 2 morceaux et non pas 2 mètres entiers ? Quel symbole doit-on utiliser ? »

Ensuite, le formateur demande que ce soit des apprenants qui proposent des quantités de mètre et décimètre pour continuer la démarche.

« Qui vient choisir une quantité de mètres et de dixièmes de mètre ? Quelqu'un d'autre veut bien venir l'écrire dans l'abaque des mesures ? Maintenant que tu as écrit le nombre de chaque partie, écris-le à côté, en dehors de l'abaque, en utilisant la virgule. »

● Situer les centièmes de mètre dans l'abaque des longueurs

Il s'agit à présent de plier le mètre en 100 parts égales et de concrétiser ainsi le centième de mètre, le centimètre. L'observation portera également sur le fait que chaque pli coïncide avec chaque changement de un en un, le centimètre étant pris comme unité de mesure clairement identifiée sur le mètre.

Le formateur coupe le mètre qui est à sa disposition.

« Pliez le mètre en 100 parts égales. »

« Qu'observez-vous ? »

De même que pour les décimètres, il est attendu que l'observation se porte sur le retour à l'unité et que chaque morceau est, dans ce cas-ci, 100 fois plus petit que le mètre.

Le groupe va maintenant positionner un centième de mètre dans l'abaque, à nouveau à l'aide d'un aimant. L'objectif est également de trouver le nom exact de cette colonne, le centimètre.

« Dans l'abaque, où placer ce bout de mètre-ci ? Pourquoi là ? »

« Quel nom donner à ce rang ? Comment dire '100 fois plus petit que le mètre' ? »

« Comment écrire le nom de cette colonne ? »

● Pour sortir une longueur décimale jusqu'au cm de l'abaque, la virgule

Le formateur propose une quantité de mètres, de décimètres et de centimètres, par exemple 1 mètre entier, 3 décimètres et 7 centimètres, qu'il place bout à bout, reconstituant ainsi une longueur.

« Comment écrire dans l'abaque cette mesure? »

« A présent, comment sortir de l'abaque cette mesure ? Comment l'écrire pour faire comprendre qu'il y a aussi des morceaux plus petits que le mètre ? Quel symbole utilise-t-on ? »

Ensuite, le formateur demande que ce soient des apprenants qui proposent d'autres assemblages de mètres et morceaux de mètres pour continuer la démarche, en veillant à ne pas introduire dans les premiers exemples des absences de rang.

« Qui vient choisir une autre mesure en prenant chaque type de morceau ? Quelqu'un d'autre veut bien venir l'écrire dans l'abaque ? Maintenant que tu as écrit le nombre de chaque partie, écris-le à côté, en dehors de l'abaque, en plaçant la virgule pour séparer la partie entière et non entière de cette mesure. »

● Situer les millièmes de mètre dans l'abaque

Sur la longueur d'un centimètre, il est demandé aux apprenants de plier le centimètre en 10 parts égales, pour mettre en évidence le millième de mètre. L'observation portera sur le fait que ce ne sont que de petites lignes sur le mètre, qu'il n'y a pas de nombre écrit au-dessus de chacune d'elles, ce qui ne veut pas dire qu'on ne peut pas les nommer. Les décimètres non plus n'apparaissent pas comme clairement annoncés.

« Essayez de plier un centième de mètre en 10 parts égales. »

« Qu'observez-vous ? »

Cette étape, non abordée avec les pailles, a pour objectifs :

- de compléter l'abaque jusqu'aux millièmes, complétant ainsi la première classe vers la droite de l'abaque.
- de concrétiser le millième de mètre, appelé millimètre et noté mm.

Les apprenants seront invités à observer et à s'imaginer, de faire le geste de découpage mental du centimètre en 10 parts égales, dans le but de favoriser l'abstraction (si nécessaire), de prendre conscience qu'on fait la même chose mais cette fois en encore plus petit. Cette observation se fera sur la longueur d'un centimètre pour en dégager le millimètre.

Remarque : pour représenter les millimètres, il n'y a que des petites lignes sur le mètre, il n'y a pas de nombre écrit au-dessus de chacune d'elles. Il en est de même pour les décimètres. Ceci devra probablement être explicité.

« Regarder avec attention ce qui est marqué sur la longueur d'un centimètre, par exemple entre le 0 et le 1. Qu'observez-vous ? »

Le formateur attend qu'ils aient observé 10 lignes partageant en 10 parts égales le centimètre. Et qu'il faudra prendre 100 fois le 10 pour refaire l'unité.

Le formateur découpe et colorie le millimètre pour le faire apparaître plus clairement au tableau, au moment où il y sera affiché.

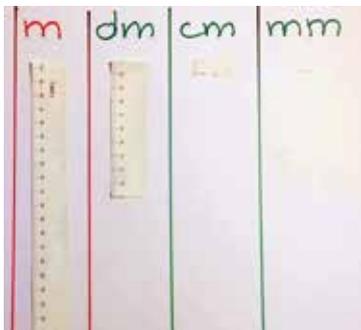
Nous allons faire appel à la déduction pour obtenir la réponse « 1000 fois plus petit » que le mètre.

« Dans l'abaque, où placer ce morceau de mètre-ci ? Pourquoi là ? »

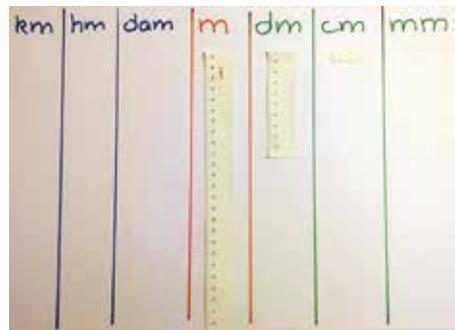
« Quel nom donner à ce rang ? Il est combien de fois plus petit que le centimètre ? Que le décimètre ? Que le mètre ? Comment dire « 1000 fois plus petit que le mètre » ? »

« Comment écrire le nom de cette colonne ? »

L'abaque des mesures de longueur à partir du mètre, vers ses sous-unités



L'abaque des mesures de longueur



● Pour sortir une longueur décimale jusqu'au mm de l'abaque, la virgule

Pour clôturer la démarche, le formateur propose une longueur composée de l'adjonction de mètre(s), de décimètre(s), de centimètre(s) et de millimètre(s), par exemple 1 mètre entier, 3 décimètres, 7 centimètres et 8 millimètres, qu'il-elle place bout à bout.

« Comment écrire dans l'abaque cette mesure ? »

« A présent, comment sortir de l'abaque cette mesure ? Comment l'écrire pour faire comprendre qu'il y a aussi des morceaux plus petits que le mètre ? Quel symbole utilise-t-on ? »

D'autres longueurs seront proposées et ainsi reconstituées dans le but de faire le passage vers l'abaque, puis vers l'écriture décimale de position.

« Qui vient choisir une autre mesure en prenant chaque type de morceaux ? Quelqu'un d'autre veut bien venir l'écrire dans l'abaque ? Maintenant que tu as écrit la quantité de chaque partie, écris-en le nombre à côté, en dehors de l'abaque, en plaçant la virgule pour séparer la partie entière et non entière de cette mesure. »

évaluation

Evaluation continue :

Tout au long du processus, le formateur veille à ce que chacun comprenne le propos, en demandant de reformuler, en posant des questions, en demandant à un plus fort d'expliquer avec ses mots, en demandant au groupe de répondre aux questions qu'ils se posent,...

Evaluation individuelle à la fin de la séquence didactique :

A partir d'une mesure de longueur donnée concrètement avec des morceaux de pailles ou de mètres (ainsi que des entiers), être capable d'écrire le nombre dans l'abaque et en écriture décimale, en plaçant correctement la virgule ainsi que les zéros « absence de rang ».

propositions de prolongement

- Numération : comparer des nombres décimaux entre eux avec les signes $<$, $>$, $=$ (Exemple : 4.5 ... 4,3)

Les signes $<$, $>$ et $=$ doivent avoir été abordés au préalable lors du travail sur la numération des nombres entiers, ainsi que l'ordre croissant et décroissant.

- Numération : ranger des suites de nombres décimaux par ordre croissant et/ou décroissant (Exemple : 10.8 10.16 10.1 10.6 10.61)
- Numération : encadrer des nombres décimaux entre 2 nombres entiers (Exemple : ... $<$ 3.5 $<$...)
- Mesures : mesurer le périmètre, diamètre, hauteur, ... d'objets familiers (Exemple : les 3 dimensions d'un morceau de sucre, la longueur de la table, le diamètre du verre à thé...)
- Construire l'abaque des masses et capacités.
- Opérations : la systématisation de la multiplication/division par 10, 100, 1000.
- Opérations : les conversions de mesure de longueur, de masse et de capacité.
- ...

pour aller plus loin

ROUCHE, Nicolas (2006). *Nombres, grandeurs, proportions. Du quotidien aux mathématiques*. Edition Ellipses.